LIBRIS We know books

Maria Zaharia
Dan Zaharia

6

GEOMETRIA în gimnaziu

Explicații și rezolvări complete

Editura Paralela 45

CUPRINS

Capitolul I
UNGHIURI

Lecţia 1. Recapitulare şi completări

Cea mai simplă noţiune geometrică este *punctul.*

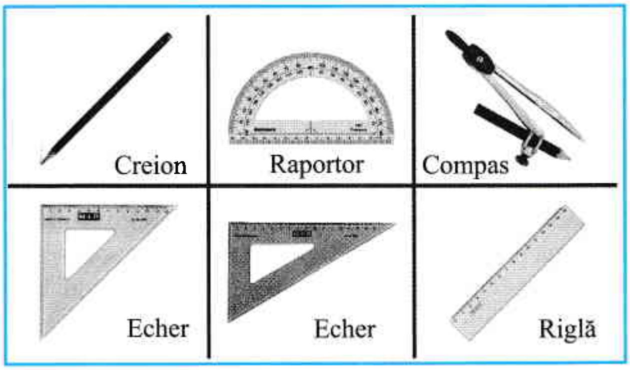
Dreapta, planul, semiplanul, semidreapta, segmentul şi multe altele sunt *noţiuni geometrice*, privite ca *mulţimi infinite de puncte.* Orice noţiune geometrică se poate reprezenta pe foaia de hârtie sau pe tabla din sala de clasă în care învăţăm, cu ajutorul unui desen, numit *figură geometrică.*

De exemplu, figura 1, de mai jos, sugerează o mulţime de puncte. Dacă ne imaginăm mulţimea respectivă ca o mulţime infinită de puncte, obţinem segmentul AB, reprezentat în figura 2.

Fig. 1

Fig. 2

Figurile geometrice au un rol însemnat în geometrie, deoarece contribuie la dezvoltarea intuiţiei spaţiale, a imaginaţiei, creativităţii, inventivităţii. O figură geometrică se desenează folosind creionul şi instrumentele de desen: rigla (gradată sau negradată), echerul, raportorul şi compasul. Pentru desenarea unei figuri geometrice în condiţii optime, este necesar să cunoaşteţi bine instrumentele de desen şi modul de folosire a acestora.



Reţine!

Creionul trebuie să fie bine ascuţit.

Rigla negradată se foloseşte pentru desenarea dreptelor, a semidreptelor şi a segmentelor. Se respectă următoarele reguli:

– vârful creionului, în permanenţă, se va sprijini pe muchia riglei şi va fi înclinat faţă de direcţia de trasare;

– trasarea se face, de regulă, de la stânga spre dreapta şi de sus în jos.

Rigla gradată se foloseşte pentru măsurarea lungimilor segmentelor sau pentru a calcula distanţa dintre puncte.

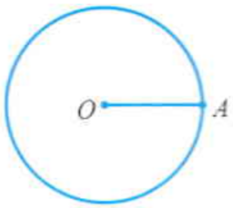
Echerul se foloseşte pentru desenarea unghiurilor drepte.

Raportorul se foloseşte pentru măsurarea unghiurilor.

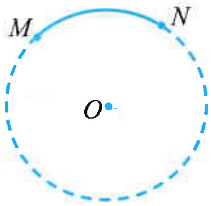
Compasul se foloseşte pentru desenarea unui **cerc** sau a unei părţi dintr-un cerc, numită **arc de cerc**. La un compas, deosebim **vârful compasului** şi **vârful port-mină.**

Pentru desenarea unui **cerc cu centrul în *O* şi raza *OA*** sau a unui arc de cerc **cu centrul în *O***, vârful compasului se fixează în centrul cercului, iar cu vârful port-mină se trasează cercul sau arcul de cerc.

cerc cu centrul în O şi raza $r = OA$



arcul de cerc MN este porţiunea de cerc limitată de punctele M şi N



Un cerc de centru O și rază r cm sau un arc al acestui cerc se desenează având grijă ca vârful compasului să rămână fixat (în punctul O), iar vârful port-mină să se miște pe suprafața de desen, fără ca, în timpul mișcării, compasul să se închidă sau să se deschidă.

De exemplu, să presupunem că dorim să desenăm un cerc (sau un arc de cerc) cu centrul într-un punct O și cu raza $r = OA = 1{,}5$ cm. Procedăm astfel:

– folosind rigla gradată, construim un segment OA, cu lungimea $r = 1{,}5$ cm;

– prin fixarea vârfului compasului în punctul O și a vârfului port-mină în punctul A, dăm deschiderii compasului lungimea $r = 1{,}5$ cm;

– cu vârful compasului în O, trasăm cercul (sau un arc al acestuia).

EXERSEAZĂ!

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.

a) Prin orice punct trece o singură dreaptă.	A	F
b) Prin orice două puncte distincte trece o singură dreaptă.	A	F
c) Dacă trei puncte aparțin unei drepte, atunci punctele sunt coliniare.	A	F
d) Dacă un punct nu aparține unei drepte, atunci punctul este exterior dreptei.	A	F
e) Dacă punctul M este pe o dreaptă AB și $AB + BM = AM$, atunci punctul M aparține segmentului AB.	A	F

2. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

Un unghi cu măsura x este unghi propriu dacă:

A. $x = 0°$; B. $x = 180°$; C. $0° < x < 180°$; D. $x > 180°$.

3. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

Două unghiuri distincte sunt congruente dacă:

A. au același vârf; B. au o latură comună; C. laturile lor coincid; D. au aceeași măsură.

4. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.

a) Segmentul AB este figura formată din

b) Semidreapta BA este figura formată din

c) Unghiul ABC este figura formată din

d) Unghiul nul BAC este figura formată din

1) semidreptele AB și AC care coincid;

2) semidreptele BA și BC;

3) toate punctele care sunt coliniare cu A și B și care sunt cu A de aceeași parte a punctului B;

4) toate punctele între A și B;

5) toate punctele între A și C.

5. Completează spațiul punctat cu răspunsul corect.

Dacă unghiul AOB este unghi alungit, atunci vârful O aparține segmentului … .

FIXEAZĂ!

6. Desenează:

a) două puncte A și B; b) o dreaptă AB; c) o semidreaptă AB;

d) o semidreaptă BA; e) un segment AB.

7. a) Desenează în caietul tău un segment CD cu lungimea de 2,5 cm.

b) În unul dintre semiplanele determinate de dreapta CD completează desenul cu un arc de cerc MN, cu centrul în punctul C și raza $r_1 = 1{,}5$ cm, și cu un arc de cerc PQ, cu centrul în punctul D și raza $r_2 = 2$ cm, astfel încât intersecția celor două arce să fie un punct E.

c) Află lungimea segmentelor CE și DE, fără a folosi rigla gradată, justifică răspunsul ales și verifică-l, folosind rigla gradată.

d) Calculează perimetrul triunghiului CDE și exprimă rezultatul în centimetri, milimetri, decimetri.

8. Observă figura 3.

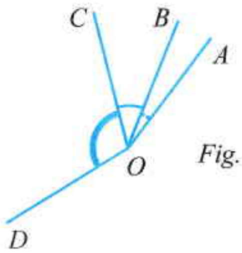


Fig. 3

a) Numește toate unghiurile formate de semidreptele din figură.
b) Știind că $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC = 51°$, $\sphericalangle BOD - \sphericalangle BOC = 72°$ și $\sphericalangle BOD = 3 \cdot \sphericalangle BOC$, calculează măsurile unghiurilor AOC, COD, AOD, BOC și AOB.

Fii CAMPION!

9. Desenează punctele distincte A, B, C, D, E și F, astfel încât să fie îndeplinite simultan condițiile:
1) segmentul AB are lungimea de 4 cm;
2) punctul M este mijlocul segmentului AB, unghiul BMC are măsura egală cu 60° și punctul D este simetricul punctului C față de punctul M;
3) unghiul AME este un unghi drept, punctele E, M și F sunt coliniare, punctul E este cu punctul C de aceeași parte a dreptei AB.

a) Ce fel de unghi este AMC? Justifică răspunsul dat.
b) Calculează măsurile unghiurilor CME, AMD și DMF.

10. Punctul O se află pe un segment MN. Dreapta AB este axa de simetrie a segmentului MN și punctele A, O, B sunt coliniare.
a) Realizează un desen care să ilustreze enunțul problemei.
b) Dacă punctul P este interior unghiului AOM și măsura unghiului AOP este o pătrime din măsura unghiului POM, calculează măsura unghiului POM.

Lecția 2. Unghiuri opuse la vârf

Rezolvăm împreună și descoperim noțiuni noi

a) Desenează o pereche de semidrepte opuse.

b) Desenează o pereche de unghiuri cu același vârf, ale căror laturi nu formează nicio pereche de semidrepte opuse.

c) Desenează o pereche de unghiuri cu același vârf, ale căror laturi formează o singură pereche de semidrepte opuse.

d) Desenează perechi de unghiuri cu același vârf, ale căror laturi formează două perechi de semidrepte opuse.

Rezolvare:

a) Perechea de semidrepte OA și OB sunt semidrepte opuse (figura 1).

Fig. 1

b) Perechea de unghiuri AOB și COD au același vârf, dar laturile lor nu formează nicio pereche de semidrepte opuse (figura 2).

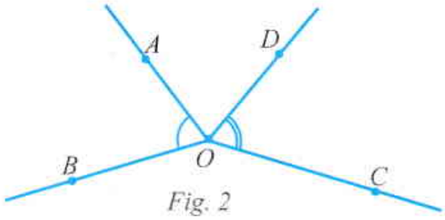


Fig. 2

c) Perechea de unghiuri AOB și COD au același vârf, laturile lor formează perechea de semidrepte opuse OA și OC, iar semidreptele OB și OD nu sunt opuse (figura 3).

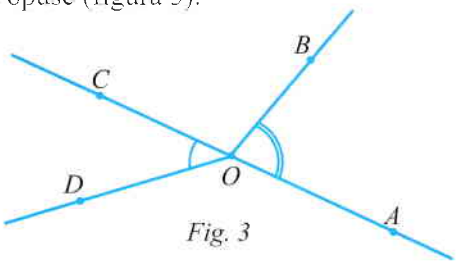


Fig. 3

d) Perechea de unghiuri AOB și COD au același vârf, laturile lor formează două perechi de semidrepte opuse OA și OC, respectiv OB și OD (figura 4).

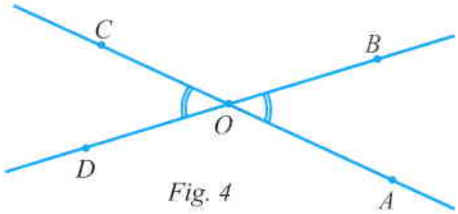


Fig. 4

Reține!

Două unghiuri care au același vârf și laturile perechi de semidrepte opuse se numesc **unghiuri opuse la vârf**.

Unghiurile AOB și COD din figura 4, sunt *unghiuri opuse la vârf*, deoarece laturile lor, OA și OC, respectiv OB și OD, sunt perechi de semidrepte opuse. Unghiurile AOD și BOC sunt, de asemenea, opuse la vârf.

Cum desenăm repede două unghiuri opuse la vârf?

Desenăm două drepte concurente. Punctul de concurență este vârful a patru unghiuri, opuse la vârf două câte două (figura 5).

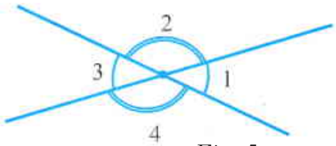


Fig. 5

Observație:

Unghiurile opuse la vârf sunt unghiuri congruente.

Într-adevăr, desenând două unghiuri oarecare opuse la vârf, folosind un raportor, vom constata că ele sunt congruente. În continuare, vom *demonstra* aceasta folosind *raționamentul*. Demonstrația bazată pe raționament joacă un rol fundamental în matematică. În acest fel se obțin proprietățile figurilor, care, de cele mai multe ori, nu pot fi deduse din desen prin folosirea instrumentelor geometrice.

Demonstrație: Ne folosim de figura 5.

Suma unghiurilor 1 și 2 formează un unghi alungit. La fel și suma unghiurilor 2 și 3. Prin urmare:

$\begin{cases} \sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 = 180^\circ \\ \sphericalangle 3 + \sphericalangle 2 = 180^\circ \end{cases}$ sau $\begin{cases} \sphericalangle 1 = 180^\circ - \sphericalangle 2 \\ \sphericalangle 3 = 180^\circ - \sphericalangle 2 \end{cases}$. Rezultă $\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 3$.

Asemănător se demonstrează că $\sphericalangle 2 \equiv \sphericalangle 4$.

EXERSEAZĂ!

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.

Desenează două unghiuri *ABC* și *DBE*. Cele două unghiuri sunt opuse la vârf dacă:

a) laturile *BA* și *BD* sunt semidrepte opuse; A F

b) laturile *BA* și *BE* sunt semidrepte opuse; A F

c) laturile *BA* și *BD*, respectiv *BC* și *BE* sunt perechi de semidrepte opuse; A F

d) laturile *BA* și *BE*, respectiv *BC* și *BD* sunt perechi de semidrepte opuse. A F

2. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

Punctul de intersecție a două drepte este vârful a patru unghiuri. Dacă suma măsurilor a două dintre cele patru unghiuri este 170°, atunci unul dintre cele patru unghiuri are măsura egală cu:

A. 100°; B. 95°; C. 70°; D. 75°.

3. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

Două unghiuri *AOB* și *BOC* au interioarele disjuncte (fără puncte comune). Dacă semidreptele OA_1, OB_1, OC_1 sunt semidreptele opuse semidreptelor *OA*, *OB*, respectiv *OC*, și măsurile unghiurilor *AOB* și A_1OC sunt egale cu 70°, măsura unghiului B_1OC_1 este egală cu:

A. 140°; B. 40°; C. 105°; D. 110°.

4. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.

Observă figura 6, unde unghiurile *MON*, *POQ* și *ROS* sunt unghiuri alungite.

Dacă măsura unghiului *POM* este o treime din măsura unghiului *POR*, atunci:

a) $x =$	1) 15°;
b) $\sphericalangle NOR =$	2) 30°;
c) $\sphericalangle MOR =$	3) 60°;
d) $\sphericalangle NOQ =$	4) 90°;
	5) 120°.

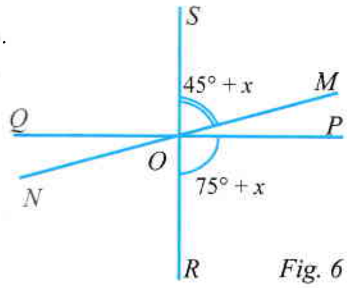


Fig. 6

5. Completează spațiul punctat cu răspunsul corect.

Punctul de intersecție a două drepte este vârful a patru unghiuri. Se notează cu *x* măsura în grade a unuia dintre cele patru unghiuri. Dacă *x* este cu 60° mai mare decât măsura unui alt unghi dintre cele patru, atunci *x* este egal cu ...°.

FIXEAZĂ

6. Punctul O este situat pe un segment AB. Se iau alte două puncte C și D de o parte și de alta a dreptei AB (figura 7). Dacă unghiurile AOC și BOD sunt congruente, demonstrează că:
   a) unghiurile AOD și BOC sunt congruente;
   b) punctele C, O și D sunt coliniare;
   c) unghiurile AOC și BOD sunt opuse la vârf.

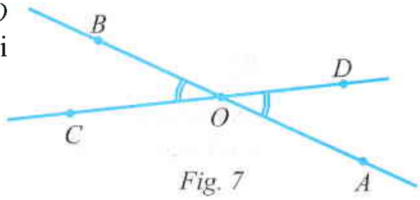


Fig. 7

7. Două drepte concurente formează patru unghiuri cu vârful în punctul O. Calculează măsura fiecărui unghi, dacă:
   a) suma măsurilor a două dintre unghiuri este $118°$;
   b) suma măsurilor a trei dintre unghiuri este $228°$.

8. Observă figura 8. Măsura în grade a unghiului AOB este egală cu x și unghiurile BOC și DOE sunt unghiuri opuse la vârf. Dacă $\sphericalangle BOC = \dfrac{x}{4}$ și $\sphericalangle COD = 2x$, calculează:
   a) măsura unghiului AOB;
   b) măsura unghiului DOE;
   c) măsura unghiului AOE.

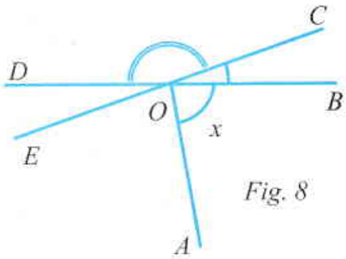


Fig. 8

FII CAMPION!

9. Punctul O este pe un segment AB. În unul dintre semiplanele determinate de dreapta AB se consideră semidreapta OC, iar în interiorul unghiului BOC un punct D. Semidreptele OE și OF sunt semidrepte opuse semidreptelor OC, respectiv OD. Dacă $\sphericalangle BOC = 125°$, calculează:
   a) măsura unghiului AOC;
   b) suma măsurilor unghiurilor EOF și BOD.

10. Punctul O este mijlocul unui segment MN și dreapta AB este axa de simetrie a segmentului MN.
   a) Realizează un desen care să ilustreze enunțul de mai sus.
   b) Dacă punctul P este interior unghiului AOM și măsura unghiului AOP este o pătrime din măsura unghiului POM, calculează măsurile unghiurilor POM și AOP.
   c) Dacă OQ este semidreapta opusă semidreptei OP, calculează măsurile unghiurilor BOQ și AOQ.

Lecția 3. Unghiuri în jurul unui punct

Rezolvăm împreună și descoperim noțiuni noi

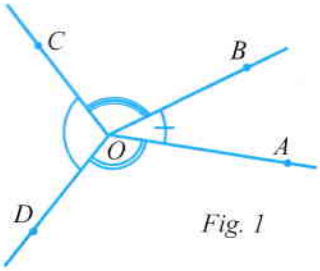


Fig. 1

Observă cele patru unghiuri AOB, BOC, COD și DOA din figura 1.

a) Numește vârful fiecărui unghi.

b) Cercetează dacă printre cele patru unghiuri există două ale căror interioare au puncte comune.

c) Calculează suma măsurilor celor patru unghiuri.

Rezolvare:

a) Vârful fiecărui unghi este punctul O. Altfel spus, *cele patru unghiuri au vârful comun.*

b) Printre cele patru unghiuri nu există două ale căror interioare să aibă puncte comune. Altfel spus, *oricare două dintre cele patru unghiuri au interioarele disjuncte.*

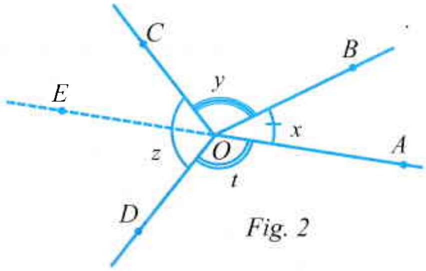


Fig. 2

c) Notăm cu x, y, z și t măsurile exprimate în grade ale unghiurilor AOB, BOC, COD, respectiv DOA. Completăm apoi figura 1 cu semidreapta OE, opusă semidreptei OA (figura 2). Deoarece unghiul AOE este unghi alungit rezultă: $\begin{cases} x + y + \sphericalangle EOC = 180^\circ \\ t + \sphericalangle EOD = 180^\circ \end{cases}$.

Adunând cele două egalități rezultă $x + y + t + \sphericalangle EOC + \sphericalangle EOD = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$.

Deoarece $\sphericalangle EOC + \sphericalangle EOD = z$, rezultă *suma măsurilor celor patru unghiuri*: $x + y + t + z = 360^\circ$.

Reține!

- **Unghiuri în jurul unui punct** înseamnă un număr finit de unghiuri proprii, cu următoarele proprietăți:
  1) au vârful comun;
  2) oricare două dintre ele au interioarele disjuncte;
  3) suma măsurilor unghiurilor este egală cu 360°.

Aplicăm cunoștințele

Observă figura 3, unde OD și OE sunt semidreptele opuse semidreptelor OB, respectiv OC.

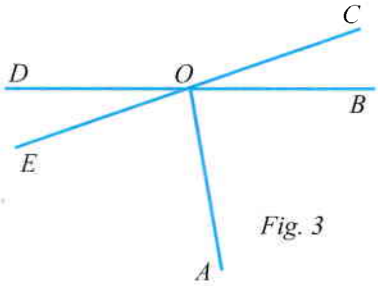


Fig. 3

a) Calculează numărul unghiurilor proprii din figură care au vârful comun în punctul O.

b) Arată că oricare două unghiuri proprii cu vârful în O nu pot fi unghiuri în jurul punctului O.

c) Numește trei unghiuri cu vârful în O care sunt unghiuri în jurul punctului O.

d) Numește patru unghiuri cu vârful în O care sunt unghiuri în jurul punctului O.

e) Demonstrează că suma măsurilor unghiurilor AOB, BOC, COD, DOE, EOA este egală cu 360° și că aceste unghiuri sunt unghiuri în jurul punctului O.

f) Demonstrează că unghiurile AOB, BOC, COD, DOE, EOA și EOB nu sunt unghiuri în jurul punctului O.

Rezolvare:

a) Deoarece unghiul este figura formată din două semidrepte care au aceeași origine, rezultă că trebuie să calculăm numărul perechilor de semidrepte cu originea în O. Tabelul următor ne ajută să stabilim corect toate perechile de semidrepte și să calculăm numărul lor.

	OA	OB	OC	OD	OE	nr. perechi
OA	-	(*OA*, *OB*)	(*OA*, *OC*)	(*OA*, *OD*)	(*OA*, *OE*)	4
OB	-	-	(*OB*, *OC*)	(*OB*, *OD*)	(*OB*, *OE*)	3
OC	-	-	-	(*OC*, *OD*)	(*OC*, *OE*)	2
OD	-	-	-	-	(*OD*, *OE*)	1
OE	-	-	-	-	-	0
				total nr. perechi de semidrepte		10

Rezultă că numărul unghiurilor din figură care au vârful comun în punctul O este egal cu 10, dintre care două unghiuri sunt improprii (BOD și COE sunt unghiuri alungite) și opt sunt unghiuri proprii.

b) Notăm cu x și y măsurile în grade a două unghiuri oarecare cu vârful în O. Cele două unghiuri fiind proprii, rezultă că $x < 180°$ și $y < 180°$, de unde $x + y < 360°$. Deoarece suma măsurilor celor două unghiuri nu este egală cu 360°, cele două unghiuri proprii, cu vârful în punctul O, nu sunt unghiuri în jurul punctului O.

c) Unghiurile AOC, COD și ODA sunt unghiuri în jurul punctului O, deoarece au vârful comun, oricare două dintre unghiuri au interioarele disjuncte și suma măsurilor celor trei unghiuri este egală cu 360°.

d) Unghiurile BOC, COD, DOE și EOA sunt patru unghiuri în jurul punctului O. Justifică!

e) Deoarece unghiul BOD este unghi alungit și

$$\begin{cases} \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD = \sphericalangle BOD \\ \sphericalangle AOB + \sphericalangle EOA + \sphericalangle DOE = \sphericalangle BOD \end{cases}, \text{ rezultă } \begin{cases} \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD = 180° \\ \sphericalangle AOB + \sphericalangle EOA + \sphericalangle DOE = 180° \end{cases}.$$

Adunând ultimele două egalități, rezultă că suma măsurilor unghiurilor AOB, BOC, COD, DOE și EOA este egală cu 360°. Aceste cinci unghiuri sunt unghiuri în jurul punctului O, deoarece au vârful comun, oricare două dintre unghiuri au interioarele disjuncte și suma măsurilor lor este egală cu 360°.

f) Conform punctului precedent $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD + \sphericalangle DOE + \sphericalangle EOA = 360°$. Adăugând în ambii membri măsura unghiului EOB, rezultă $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD + \sphericalangle DOE + \sphericalangle EOA + \sphericalangle EOB = 360° + \sphericalangle EOB > 360°$.

Prin urmare, unghiurile AOB, BOC, COD, DOE, EOA și EOB nu sunt unghiuri în jurul punctului O, deoarece suma măsurilor lor nu este egală cu 360°.

Altfel spus, unghiurile AOB, BOC, COD, DOE, EOA și EOB nu sunt unghiuri în jurul punctului O, deoarece două dintre aceste unghiuri, EOA și EOB, nu au interioarele disjuncte (interioarele lor au puncte comune).

EXERSEAZĂ!

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.
Observă figura 4, care pune în evidență cinci unghiuri, numerotate de la 1 la 5, și care au măsurile egale cu 120°, 105°, 35°, 35°, respectiv 100°. Atunci:

a) cele cinci unghiuri au același vârf; A F
b) cele cinci unghiuri au interioarele disjuncte două câte două; A F
c) $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 4 + \sphericalangle 5 = 360°$; A F
d) unghiurile 1, 2, 4 și 5 sunt unghiuri în jurul unui punct; A F
e) $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 + \sphericalangle 5 = 360°$; A F
f) unghiurile 1, 2, 3 și 5 sunt unghiuri în jurul unui punct. A F

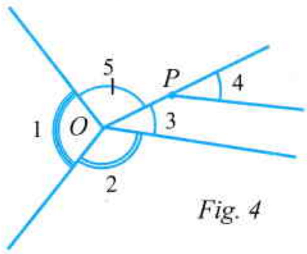


Fig. 4

2. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.
Unul dintre cele patru unghiuri din jurul unui punct are măsura în grade egală cu x, iar celelalte trei unghiuri au măsurile egale cu $2x$, $3x - 7°$, respectiv 19°. Atunci x este egal cu:

A. 58°; B. 62°; C. 60°; D. 75°.

3. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.
Două unghiuri proprii AOB și BOC au interioarele disjuncte. Notăm cu x și y măsurile unghiurilor AOB, respectiv BOC, exprimate în grade. Unghiurile AOB, BOC, AOC sunt unghiuri în jurul punctului O, dacă:
A. $x + y < 180°$; B. $x + y = 180°$; C. $x + y > 180°$; D. $x + y = 360°$.

4. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.
Observă figura 5. Dacă $\sphericalangle AOB = 120°$, $\sphericalangle BOC = 165°$ și suma măsurilor unghiurilor AOB, BOC, COA și AOD este egală cu 380°, atunci:

a) $\sphericalangle AOC =$	1) 20°;
b) $\sphericalangle AOD =$	2) 30°;
c) $\sphericalangle BOD =$	3) 95°;
d) $\sphericalangle DOC =$	4) 100°;
	5) 75°.

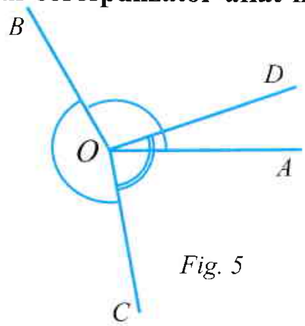


Fig. 5

5. Completează spațiul punctat cu răspunsul corect.
Trei drepte concurente în punctul O determină șase unghiuri congruente în jurul acestui punct. Dacă x este măsura în grade a unuia dintre cele șase unghiuri, atunci x este egal cu ...°.

FIXEAZĂ!

6. Desenează patru unghiuri AOB, BOC, COD, DOE, cu vârful comun punctul O, astfel încât oricare două să aibă interioarele disjuncte, iar unghiurile să aibă măsurile: 30°, 90°, 55°, respectiv 60°.
   a) Cele patru unghiuri sunt unghiuri în jurul punctului O?
   b) Pe figura realizată, identifică un al cincilea unghi, astfel încât cele cinci unghiuri să fie unghiuri în jurul punctului O. Explică răspunsul dat.
   c) Pe figura realizată, identifică un al cincilea unghi, astfel încât cele cinci unghiuri să nu fie unghiuri în jurul punctului O. Justifică răspunsul dat.

7. Observă cele trei unghiuri din figura 6, unde $\sphericalangle AOB = 120°$, $\sphericalangle BOC = 120°$ și $\sphericalangle COD = 140°$.
   a) Numește vârful celor trei unghiuri.
   b) Calculează suma măsurilor celor trei unghiuri.
   c) Justifică în două moduri că cele trei unghiuri nu sunt unghiuri în jurul punctului O.

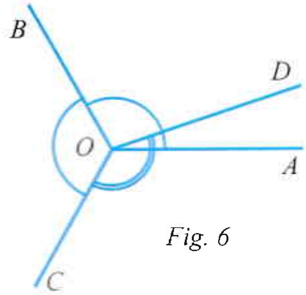


Fig. 6

8. Un unghi AOB este alungit, semidreapta OC este astfel încât $\sphericalangle AOC = 5 \cdot \sphericalangle COB$, punctele D și C sunt situate de o parte și de alta a dreptei AB și $\sphericalangle AOD = 2 \cdot \sphericalangle COB$.
   a) Calculează măsurile unghiurilor AOC și COB.
   b) Arată că unghiurile AOC, COB, BOD și DOA sunt unghiuri în jurul punctului O.

FII CAMPION!

9. Se notează cu O punctul de intersecție a două drepte concurente a și b. Rezultă patru unghiuri proprii, cu vârful O comun.
   a) Demonstrează că cele patru unghiuri sunt unghiuri în jurul punctului O.
   b) Dacă suma măsurilor a trei dintre unghiuri este de 322°23', calculează măsura fiecărui unghi.

10. Două unghiuri proprii AOB și BOC au interioarele disjuncte (fără puncte comune). Notăm cu x și y măsurile unghiurilor AOB, respectiv BOC, exprimate în grade. Dacă $x + y > 180°$, demonstrează că unghiurile AOB, BOC, AOC sunt unghiuri în jurul punctului O.